Quasiteilchen und Wärmetransport

Wintersemester 2017/18

Matias Bargheer/Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 4 Ausgabe: 19. Dezember 2017

Eingabe: n.V.

Aufgabe 4.1 – Lineare Ketten (20 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir kurz lineare Ketten von Oszillatoren angeschaut. Dies ist ein Standard-Modell für Phononen, in dem die Oszillatoren die Atomrümpfe in einem Gitter sind. Ergänzt um ein nichtlineares Verhalten der "Bindungen" zwischen den Atomen, erhalten wir das berühmte "Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou–Modell" der statistischen Physik, an dem um 1950 die ersten Computer-Experimente durchgeführt wurden.

(1) Finden Sie heraus, wer Tsingou war.

(2) Im linearen Fall wollen wir das Modell benutzen, um eine dünne Schicht auf einem Substrat zu beschreiben. Wiederholen Sie die Argumentation, die von der diskreten Kette

$$M \frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}t^2} = K[u(x+a) - u(x)] - K[u(x) - u(x-a)] \tag{4.1}$$

(M ist die Masse jedes Oszillators, K die Federkonstante, $u(x)$ die Auslenkung am Gitterpunkt x und a die Gitterkonstante) zu der elastischen Wellengleichung der Kontinuumsmechanik führt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.2}$$

wobei $c^2 = Ka^2/M$ die Schallgeschwindigkeit ist.

(3) Für eine Schicht auf einem Substrat sind folgende Randbedingungen sinnvoll [warum? = 5 Bonuspunkte]

$$\text{“oberes Ende”}: \quad \frac{\partial u(x=0,t)}{\partial x} = 0\,, \qquad \text{“unteres Ende”}: \quad u(x=L,t) = 0 \tag{4.3}$$

Skizzieren Sie die "Eigenmoden" der elastischen Wellengleichung (4.2) unter diesen Randbedingungen. (Eigenmoden sind Lösungen mit fester Frequenz.) Tragen Sie qualitativ auf, wie sich für jede Mode die "Ausdehnung"

$$\delta L = \int_0^L \mathrm{d}x\, u(x) \tag{4.4}$$

verhält. [Warum dieser Name? = 5 Bonuspunkte]

(4) Nun schalten wir die Nichtlinearität ein, gehen aber zurück in das diskrete Bild und betrachten nur ein Kettenglied:

$$M \frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}t^2} = -Kb + \alpha b^2 \tag{4.5}$$

Hier ist $b = u(x+a) - u(x)$ die Länge der Bindung und α ein nichtlinearer Koeffizient. Im linearen Fall gilt im thermischen Gleichgewicht (warum?)

$$\frac{M}{2} \langle \big(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} \big)^2 \rangle = \frac{k_B T}{2} = \frac{K}{2} \langle b^2 \rangle \tag{4.6}$$

Gehen Sie mit diesen Mittelwerten in die Bewegungsgleichung (4.5) und überlegen Sie, wie die Größen α und T in die thermische Ausdehnung eingehen.