Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2015/2016) -

Übungsblatt 4

Ausgabe 08.12.15 – Abgabe 17.12.15– Besprechung 18.12.15

▷ Aufgabe 1 (Klein'sches Paradox)

Die Streuung an der Potentialschwelle, Sie erinnern sich, ist eine beliebte Übungsaufgabe der nicht-relativistischen Quantenmechanik.

Um die Sache nicht unnötig zu komplizieren untersuchen wir die Streuung geladener Klein-Gordon Teilchen in einer Dimension. Zuständig ist die Klein-Gordongleichung

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \left(\partial_t + ie\Phi(z) \right)^2 - \partial_z^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right\} \phi(z,t) = 0 \tag{1}$$

worin $\Phi(z)$ die Potentialschwelle

$$\Phi(z) = \begin{cases} 0\,, & z < 0 \\ \Phi_0\,, & z > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Analysieren Sie die Streung monoergetischer Teilchen der Energie E die von links einfallen, also $\Phi_{\text{in}}(z,t) = e^{-iEt/\hbar + ikz}$. Bestimmen Sie Reflektions- und Transmissionkoeffizienten R und $T = 1 - R$ der Schwelle. Wenden Sie Ihre Augenmerk auf den Fall der "hohen Schwelle" $e\Phi_0 > E + mc^2$, überzeugen sich, dass in diesem Fall $R > 1$ und $T < 0$, und suchen Sie diesen merkwrdigen Befund des sog Klein'schen Paradox zu interpretieren.

▷ Aufgabe 2 (Omnipräsenz der negativen Energien)

Betrachten Sie ein freies Dirac-Teilchen das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch

$$\psi(\vec{x}, t=0) = \frac{1}{[2\pi a^2]^{3/4}} e^{-\vec{x}^2/(4a^2) + i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

beschrieben wird, also "Gauss'sches Wellenpaket" ausschließlich positiver Energie-Komponenten.

Zeigen Sie durch Lösen des Anfangswertproblems der freien Dirac-Gleichung: (a) Zu einem späteren Zeitpunkt entwickelt ψ Anteile negativer Energie. (b) Die Anteile werden $O(1)$, wenn a von der Größenordnung oder kleiner als die Comptonwellenlänge.

Merke: Versucht man Teilchen besser als ihre Comptonwellenlänge zu lokalisieren wird man mit relativistischen Effekten konfrontiert.

▷ Aufgabe 3 (Zitterbewegung von Dirac-Teilchen)

Zitterbewegung bezeichnet die scheinbar zittrige Bewegung eines freien Dirac Teilchens. Statt im Schrödingerbild, analysieren wir hier die Zitterbewegung im Heisenbergbild. Im

Heisenbergbild bewegen sich die Operatoren gemäß[1]

$$\frac{dO(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[O(t), H\right] \,, \tag{4}$$

mit H Dirac Hamiltonoperator,

$$H = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2 \,. \tag{5}$$

(a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} &= 0\,, && (6)\\ \frac{d\vec{x}(t)}{dt} &\equiv \vec{v}(t) = c\vec{\alpha}(t)\,, && (7)\\ \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} &= \frac{2}{i\hbar}\left(c\vec{p} - H\vec{\alpha}(t)\right) \,. && (8) \end{aligned}$$

(b) In der Vorlesung wurde schon darauf hingewiesen, dass die Eigenwerte der α-Matrizen gleich ± 1, und es wurde geschlossen, dass Diracteilchen sich daher nur mit Lichtgeschwindigkeit bewegen können. Erlaubt die Quantenmechanik, diesen Befund experimentell zu verifizieren? Falsifizieren?

(c) Bestätigen Sie durch Integration der Bewegungsgleichungen (6)–(8),

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{c^2\vec{p}}{H}t + \frac{\hbar c}{2i}H^{-1}\left(e^{2iHt/\hbar} - 1\right)\left(\vec{\alpha}(0) - \frac{c\vec{p}}{H}\right) \,. \tag{9}$$

(d) Identifizieren Sie in (9) den Term, der der Bewegung eines Welllenpakets mit der Gruppengeschwindigkeit entspricht.

(e) Analysieren Sie den oszillierenden Term in (9), der der Zitterbewegung entspricht. Bestätigen Sie, dass die Zitterbewegung von der Interferenz von Zuständen positiver und negativer Energie herrührt.
Hinweis: Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass der Operator $\vec{\alpha}(0) - \frac{c\vec{p}}{H}$ nur zwischen Zuständen mit gleichem Impuls nichtverschwindende Matrixelemente besitzt. Schließen Sie sodann aus $\vec{\alpha}H + H\vec{\alpha} = 2c\vec{p}$ (Beweis!), und also $(\vec{\alpha} - \frac{c\vec{p}}{H})H + H(\vec{a} - \frac{c\vec{p}}{H}) = 0$, dass die Energien entgegengesetzt sein müssen.

[1] Um die Notation nicht unnötig aufzublähen verzichten wir auf die Hüte auf den Operatoren.