Kepler, Newton und so
Physikalischer Happen zur ART*

---

1 Intro

Nach sorgfältige Beobachtung der Planetenbewegungen und einer scharfsinnige Analyse der Beobachtungsdaten hat Johannes Kepler (1571–1630) seine Erkenntnisse zusammengefasst[1]

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt (Ellipsensatz).[2]
2. Der Fahrstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz).[3]
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer jeweiligen Ellipsen.[4]

Etwa 70 Jahre nach ihrer Veröffentlichung hat Isaak Newton (1643–1727) die Keplerschen Gesetze und die davon unabhängigen Erkenntnisse Galileis den freien Fall betreffend[5] auf eine gemeinsame Ursache zurückgeführt und eine einheitliche Theorie der Gravitation entwickelt.[6] Der zentrale Begriff ist die Gravitationskraft, bestimmt als eine universelle "Paarkraft" der jedes beliebige Paar von Körpern unterworfen ist. Sie ist immer anziehend, sie wirkt enlang der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden Körper (kugelförmige Körper mit isotroper Masserverteilung vorausgesetzt), genügt dem Reaktionsprinzip (lex tertia "actio est reactio"), und geht umgekehrt proportional dem Abstandsquadrat in die Knie,

$$F = -G\frac{m_A m_B}{r^2} \tag{1}$$

worin m_A, m_B die trägen Massen der beiden Körper, r ihr Abstand, und G die Gravitationskonstante (das Minuszeichen soll den anziehenden Charakter betonen).

Im Physikkurs dient (1) häufig als Ausgangspunkt, um die drei Keplerschen Gesetze herzuleiten. Das ist zwar grundsätzlich nicht falsch, sicherliche auch eine gute Übung im Integrieren von Differentialgleichungen, aber irreführend. Kepler ist – neben Galilei – Ausgangspunkt, nicht Resultat der Newtonschen Gravitationstheorie. Außerdem haben weder Kraft noch Masse für Kepler eine Rolle gespielt. Und schließlich verschleiert das Vorgehen die spezifischen Beiträge der einzelnen Keplerschen Gesetze zur Gravitationskraft (Kepler-I$\rightarrow$ Beschleunigung $\propto 1/\text{Abstand}^2$, Kepler-II$\rightarrow$ Zentralkraft, Kepler-III$\rightarrow$ Gm_Am_B).

Hier schlagen wir genau den entgegengesetzen Weg ein: wir nehmen uns die Keplerschen Gesetze und analysieren ihren Beitrag zur Newtonschen Gravitationstheorie. Neben dem Erkenntnisgewinn über die spezfische Rolle der einzelnen Keplerschen Gesetze hat dieses Vorgehen den Vorteil, dass der mathematische Aufwand überschaubar bleibt (im wesentlichen Mathematik der Oberstufe).

---

*Nacherzählung einer Improvisation vom 19.01.2010; gedacht für Schüler und für Lehrer.

2 Die drei Keplerschen Gesetze . . .

2.1 Kepler I

Das erste Keplersche Gesetz legt die Geometrie der Planetenbahnen fest. Demnach verläuft die Bewegung jedes Planeten in einer ihm eigenen Ebene, genannt seine *Ekliptikalebene*, und ist im übrigen eine Ellipse in deren einem Brennpunkt das Zentralgestirn steht. Eine Ellipse, daran sei erinnert, ist der geometrsiche Ort aller Punkte, deren Summe der Abstände zu zwei festen Punkten, den Brennpunkten der Ellipse, stets den gleichen Wert $2a$ aufweist (vgl. Abb. 1)

$$r + r' = 2a\,. \tag{2}$$

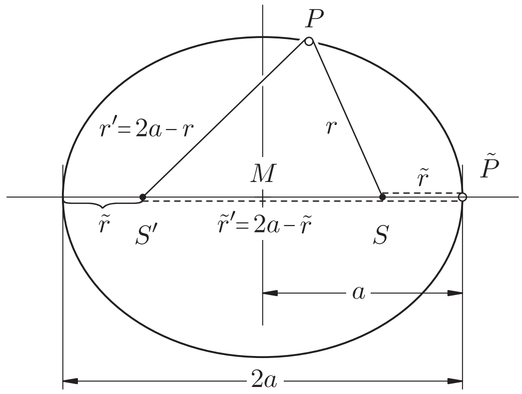

Abbildung 1: *Die Gärtnerkonstruktion einer Ellipse: die Schnur $S'PS$ ist für jeden Punkt P auf der Ellipse von fester Länge.*

Die Bedeutung von $2a$ erschließt sich aus der speziellen Situation, bei der der Planet auf einer Linie mit den beiden Brennpunkten steht ($\tilde{P}$ in Abb. 1): offensichtlich ist $2a$ der große Durchmesser der Ellipse, entsprechend a der sog. *große Halbdurchmesser*, zuweilen genannt die *große Halbachse* der Ellipse.

Die beiden Brennpunkte S', S liegen auf auf der Hauptachse links und rechts vom Mittelpunkt M in einem Abstand εa, worin die dimensionslose Zahl ϵ die sog *numerische Exzentrität* der Ellipse bezeichnet. Die Größe $\epsilon = \varepsilon a$ läuft unter dem schlichten Namen *Exzentrität.* Für $\varepsilon = 0$ fallen die beiden Brennpunkte zusammen und die Ellipse entartet zum Kreis. Für $\varepsilon \to 1$ fallen die Brennpunkte mit den Scheitelpunkten zusammen, die Ellipse entartet zur Strecke der Länge $2a$. Allgemein ist $0 \le \varepsilon < 1$.

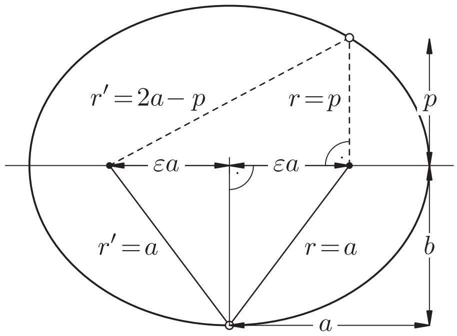

Abbildung 2: *Numerische Exzetnrität ε, kleine Halbachse b und Paramter p.*

Befindet sich der Planet von der Hauptachse aus gesehen lotrecht über (bzw. unter) dem Mittelpunkt M ist er gleichweit von den beiden Brennpunkten entfernt, $r = r' = a$. Sein Abstand vom Mittelpunkt der Ellipse, bezeichnet b kennzeichnet die *kleinen Halbdurchmesser* der Ellipse. Das aus εa, b und $r(= a)$ gebildete Dreieck ist rechtwinklig, und mit Pythagoras $b^2 + (\varepsilon a)^2 = a^2$, ergo $\varepsilon^2 = 1 - b^2/a^2$.

Befindet sich der Planet schließlich von der Hauptachse gesehen lotrecht über einem Brennpunkt, ist er von diesem in Entfernung p – vgl. Abb. 2. Wiederum mit Pythagoras $p^2 + (2\varepsilon a)^2 = (2a - p)^2$ bzw.

$$p = a(1 - \varepsilon^2) = b^2/a \le b \tag{3}$$

etwas phantasielos genannt *Parameter*.

Bei gegebener Ellipsenbahn kann die Lage des Planeten immer durch Angabe des Winkels φ angegeben werden, den der sog *Fahrstrahl* Sonne-Planet mit der großen Achse bildet. Via Cosinus-Satz der Geometrie $r'^2 = r^2 + (2\varepsilon a)^2 + 2(r2\varepsilon a)\cos\varphi$. Benutzt man hier $r' = 2a - r$ findet man $r(1 + \varepsilon\cos\varphi) = p$. Umstellen nach r liefert die *Ellipsengleichung*

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,. \tag{4}$$

Bei $\varphi = 0$ steht der Planet in größter Sonnennähe, dem sog. *Perihel*, bei $\varphi = \pi$ in größter Sonnenferne, dem sog. *Aphel*.

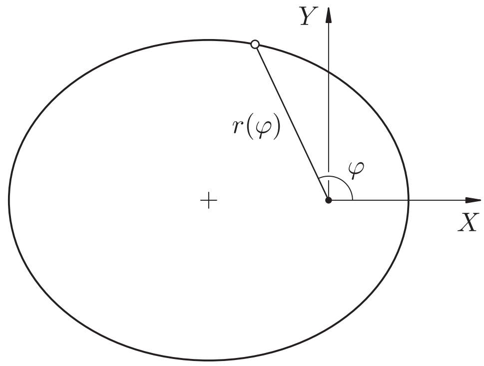

Abbildung 3: *Fahrstrahlkoordinaten mit Ursprung in einem Brennpunkt.*

2.2 Kepler II

Das zweite Keplersche Gesetz ist der Flächensatz. Er besagt, dass der Fahrstrahl eines Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Nach dem Flächensatz ist das Flächelchen $df = \frac{1}{2}rrd\varphi$ proportional zur verstrichenen Zeit dt, also $df = \text{const.}dt$, bzw. $r^2\dot\varphi = 2\text{const.}$. Führt man hier abkürzend ein $\lambda = 2\text{const.}$, stellt nach der Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ um, besagt demnach das zweite Keplersche Gesetz

$$\dot\varphi = \frac{\lambda}{r^2}\,. \tag{5}$$

worin λ eine kinematische Konstante, die (doppelte) *Flächengeschwindigkeit.*[7]

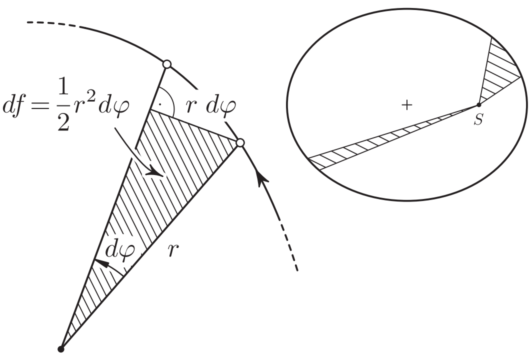

Abbildung 4: *Zum Flächensatz.*

Im Perihel (kleines r) ist die Winkelgeschwindigkeit groß, im Aphel ist sie klein. Auf Kreisbahnen $r = const.$ ist die Winkelgeschwindigkeit konstant.

2.3 Kepler III

Das dritte Keplersche Gesetz besagt, dass sich die Quadrate der Umlaufzeiten auf zwei Planetenbahnen wie die Kuben der großen Halbachsen zueinander verhalten,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{K}}a^3 \tag{6}$$

worin der Faktor $4\pi^2$ der Konvention geschuldet, und $\mathcal{K}$ eine physikalische Konstante – die *Kepler-Konstante*[8] die für alle möglichen Kepler-Bahnen in einem gegebenen Zwei-Körpersystem den gleichen Wert aufweist.[9]

Gemäß Flächensatz ist $df = \frac{\lambda}{2}dt$ die in der Zeitspanne dt überstrichene Fläche. Die in der Umlaufzeit T überstrichene Fläche ist πab, die Fläche der Ellipse. Damit $\pi ab = \frac{\lambda}{2}T$ bzw. $T = \frac{2\pi ab}{\lambda}$. Benutzt man jetzt den Ellipsenparameter p zugunsten b, also $b = \sqrt{pa}$, schaut man auf $T = \frac{2\pi\sqrt{p}}{\lambda}a^{3/2}$, bzw.

$$p = \frac{\lambda^2}{\mathcal{K}} \tag{7}$$

Offensichtlich behauptet Kepler-III eine nicht-triviale Abhängigkeit der geometrischen Konstante p von der kinematischen Konstanten λ.

3 ... und was Newton daraus gemacht hat

3.1 Kinematik der Bewegung in 2D

Kinematik ist die Kunst Bewegung zu beschreiben. Von der Ursache von Bewegung oder irgendwelchen physikalischen Gesetzen ist dabei nicht die Rede. Das ist Gegenstand der Dynamik. Aber um die geht es in diesem Unterabschnitt noch nicht. Hier geht es zunächst nur um die Beschreibung allgemeiner Bewegung eines Punktes in der Ebene.

Bei ebener Bewegung ist zu jedem Zeitpunkt die Lage des Punktes durch die kartesischen Koordinaten $x(t), y(t)$ seines Ortsvektors $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ eindeutig bestimmt. Ableitung nach der Zeit gibt den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, zweifache Ableitung den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$. In Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, bzw.

$$\vec{r} = r\,\underbrace{(\cos\varphi, \sin\varphi)}_{:=\vec{e}_r}\,. \tag{8}$$

worin r (und selbstverständlich auch $\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$) eine Funktion des Winkels φ, und dieser wiederum eine Funktion der Zeit. Nach der Produktregel und Kettenregel der Differentialrechnung die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r && (9)\\
&= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underbrace{(-\sin\varphi, \cos\varphi)}_{:=\vec{e}_\varphi} && (10)\\
&= \dot{r}\vec{e}_r + \frac{\lambda}{r}\vec{e}_\varphi\,. && (11)
\end{aligned}$$

und also die Beschleunigung

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\,\underbrace{\dot{\vec{e}}_r}_{=\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\lambda}{r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{\lambda}{r}\,\underbrace{\dot{\vec{e}}_\varphi}_{-\dot{\varphi}\vec{e}_r} && (12)\\
&= \left[\ddot{r} - \frac{\lambda^2}{r^3}\right]\vec{e}_r + \underbrace{\left[\dot{r}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{r}\right)}_{=\frac{\dot{\lambda}}{r} - \dot{r}\frac{\lambda}{r^2}}\right]}_{=\frac{\dot{\lambda}}{r}}\vec{e}_\varphi && (13)
\end{aligned}$$

wobei $\lambda = \lambda(t)$ abkürzend für $r(t)^2\dot{\varphi}(t)$, dem Momentanwert der doppelten Flächengeschwindigkeit.

3.2 Bewegung auf Keplerbahnen

Keplers Flächensatz besagt, dass die Flächengeschwindigkeit bei der Bewegug eine Konstante, $\dot{\lambda} = 0$, entsprechend vereinfacht sich Gl. (13)

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\ddot{r} - \frac{\lambda^2}{r^3}\right]\vec{e}_r\,. \tag{14}$$

Die Beschleunigung ist in diesem Falle radial gerichtet (die Kraft $m\ddot{\vec{r}}$ entsprechend eine Zentralkraft) – und das ausschließlich aufgrund Kepler-II, dem Flächensatz! Ellipsenform oder Kepler-III spielen hier keine Rolle. Auf Kreisbahnen ist definitionsgemäß $r = const.$, daher $\ddot{r} = 0$. Die in Gl. (14) verbleibende Beschleunigung ist die Zentripetalbeschleunigung $a_{\mathrm{zp}} = \omega^2 r$, worin $\omega \equiv \dot{\varphi}$ eine konstante Winkelgeschwindigkeit.

Für die Berechnung von $\ddot{r}$ benutzen wir die Ellipsengleichung (4). Via Kettenregel, $\dot{r} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi}$, mit $\frac{dr}{d\varphi}$ aus Gl.(4), $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon p \sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{\varepsilon}{p}r^2\sin\varphi$, und also $\dot{r} = \frac{\varepsilon}{p}\lambda\sin\varphi$. Nochmals differenzieren, dabei Flächensatz $\dot{\lambda} = 0$ berücksichtigen, liefert $\ddot{r} = \frac{1}{p}\frac{\lambda^2}{r^2}\epsilon\cos\varphi$ bzw.

$$\ddot{r} = \frac{\lambda^2}{r^3} - \frac{\lambda^2}{p}\frac{1}{r^2}\,, \tag{15}$$

wobei hier $\epsilon\cos\varphi = \frac{p}{r} - 1$ benutzt wurde.

Verwendet man nun Gl. (15) in Gl. (14) gelangt man zur Erkenntnis: Ellipsenförmige Bewegung mit konstanter Flächengeschwindigkeit gibt Anlass zu einer Beschleunigung

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\lambda^2}{p}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \tag{16}$$

Für kreisförmige Bewegung $r = const.$ ist $p = r$, $\lambda = r^2(2\pi/T)$ und somit die Radialbeschleunigung $4\pi^2 r/T^2$, eine Beziehung die Newton in seiner Analyse der Keplerschen Gesetze weidlich ausgeschlachtet hat.

Interessant ist der Vorfaktor in Gl. (16): er *könnte* ja für jede Planetenbahn verschieden ausfallen – was offensichtlich mit Kepler I & II durchaus verträglich wäre. Hier kommt nun aber Kepler III ins Spiel. Gemäß (7) ist λ^2/p eine für alle Keplerbahnen einheitliche Konstante, und also ist die Beschleuigung auf solchen Bahnen abschließend

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mathcal{K}}{r^2}\vec{e}_r\,. \tag{17}$$

Die Beschleunigung ist radial gerichtet (wegen Flächensatz), geht wie eins-durch-Abstandquadrat in die Knie (wegen Planetenbahn=Ellipse), und ist im übrigen proportional der Keplerkonstanten des Systems (wegen Umlaufzeit-Durchmesser Beziehung).

Zu beachten ist, dass der Radiusvektor $\vec{r}$ nicht die Koordinate *eines* Körpers, sondern die Differenzkoordinate zweier Körper, Zentralgestirn und Planet: die Keplerschen Gesetze (in der hier vorgenommenen Auslegung) betreffen ein *Zwei-Körpersystem*, und handeln nur vom Fahrstrahl in diesem System. Deswegen behalten sie ihre volle Gültigkeit, wenn in ihnen die Rolle von Zentralgestirn und Planet vertauscht wird: "Die Erde umkreist die Sonne auf einer Ellipsenbahn in deren einen Brennpunkt die Sonne steht" ist aus Sicht der Keplerschen Gesetze vollständig äquivalent "die Sonne umkreist die Erde auf einer Ellipsenbahn in deren einen Brennpunkt die Erde steht". Entsprechend muss jede Theorie die die Keplerkonstante $\mathcal{K}$ mit den Eigenschaften der beteiligten Körper verknüpft, und insofern nach den *Ursachen* der Keplerbewegung fragt, diese Symmetrie respektieren, $\mathcal{K}(A,B) = \mathcal{K}(B,A)$. Bei Kepler bleibt die Frage nach den Ursachen offen, die Keplerkonstante letzlich die empirische Konstante eines verschränkten Zwei-Teilchensystems.

3.3 Newtons Theorie der Gravitation

Beschleunigung, argumentiert Newton in den Principia, impliziert Änderung von Bewegung, und Bewegungsänderung (Newtons *Kraft der Trägheit*) findet ihre Ursache in *angebrachter Kraft*. Mit dem Impuls $\vec{p}$ als Maß von Bewegung, Bewegungsänderung entsprechend $\dot{\vec{p}}$, also $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, worin $\vec{F}$ die angebrachte Kraft. Da Bewegung nach Newton durch die "Größe der Materie und die Geschwindigkeit vereint gemessen", und das Maß von Materie die (träge) Masse,[10] ist $\vec{p} = m\vec{v}$, worin m die Masse, und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Körpers. Geht dem Körper im Laufe seines Lebens kein Materie verloren, $\dot{m} = 0$, nimmt $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ die aus sder Schule vertraute Form an

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{18}$$

Lies: Trägheitskraft (linke Seite) wird durch die angebrachte Kraft (rechte Seite) hervorgerufen.

Newtons Geniestreich bestand darin, die Keplerbewegungen als Manifestation der Schwerkraft auszumachen. Schwerkraft bzw Schwere war zwar im terrestrischen Kontext wohl vertraut, man denke an die Versuche Galileis zum freien Fall und zum schiefen Wurf, dass aber himmlische Vorgänge (Mondbahn) die gleichen Ursachen haben wie Vorgänge auf der Erde (Fallobst) ist schon ein gewagter Gedanke.

Als Maß der Schwerkraft bestimmt Newton die Gegenkraft, die aufgebracht werden muss, um einen Körper am Fallen zu hindern. Dabei wird festgestellt, dass die Schwerkraft für verschiedene Körper durchaus verschieden ist – eine Feder bedarf einer wesentlich kleineren Gegenkraft um ihre Schwerkraft zu kompensieren als eine Bleikugel. Weiterhin wird festgestellt, dass die Schwerkraft zwar durchaus abhängig von Ort an dem die Versuche durchgeführt werden (auf Bergen kleiner als in Tälern), das Verhältnis der Schwerkräfte verschiedener Körper aber unabhängig von diesem Ort, allein bestimmt durch das Verhältnis ihrer *schweren Massen*. Schließlich wird festgestellt, dass zwischen einer genügend schnell abgeschossenen Gewehrkugel (genügend schnell? Na ja, schnell genug, dass sie die Erde umrundet) und dem Mond auf einer genügend tiefen Umlaufbahn kein grundsätzlicher Unterschied besteht: bei beiden wird die Zentrifugalbeschleunigung durch die Schwerebeschleunigung kompensiert weshalb sie nicht nach Unendlich entkommen können.

In der heutzutage gebräuchlichen Terminologie die von B auf A ausgeübte Schwerkraft,

$$F_{AB} = \frac{m_A^{\mathrm{s}} \mathcal{M}_B}{r^2}. \tag{19}$$

worin m_A^{s} die schwere Masse (der Feder, der Bleikugel, des Mondes) und $\mathcal{M}_B$ eine charakteristische Konstante des Himmelsköpers der die Schwerkraft bewirkt, im Folgenden genannt die *gravitative Quellstärke.*[11]

Der Körper A erfährt aufgrund der Schwerkraft eine Beschleunigungen $a_A = (m^{\mathrm{s}}_A/m_A)\mathcal{M}_B/r^2$. Es könnte sein, dass das Verhältnis von “Schwere” und “Trägheit” unterschiedlicher Körper, die aus unterschiedlichen Substanzen bestehen, verschieden ist. Das ist aber – so das Äquivalenzprinzip – nicht der Fall: der freie Fall, also die Beschleunigung im Schwerefeld ist für alle Körper gleich. Im Rahmen der derzeitig verfügbaren Messgenauigkeit sind demnach träge und schwere Masse universell proportional, bzw. [12]

$$m^{\mathrm{s}} = m \tag{20}$$

Verbleibt den Zusammenhang von gravitativer Quellstärke und Masse aufzuhellen. Newton wendet hier sein lex tertia “actio est reactio” an und schließt, dass die Körper gegenseitig schwer sind, $F_{AB} = F_{BA}$, und daher $m^{\mathrm{s}}_A\mathcal{M}_B = m^{\mathrm{s}}_B\mathcal{M}_A$. Umstellen liefert $\mathcal{M}_A/m^{\mathrm{s}}_A = \mathcal{M}_B/m^{\mathrm{s}}_B$ – kurz: das Verhältnis von gravitativer Quellstärke $\mathcal{M}_K$ eines Körpers K zu seiner schweren Masse m^{s}_K ist eine universelle Konstante G, genannt die *Gravitationskonstante*,

$$\mathcal{M}_K = Gm^{\mathrm{s}}_K\,, \qquad G = (6,673 \pm 10) \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2\mathrm{kg}^{-2}\,. \tag{21}$$

Für den Fahrstrahl $\vec{r} := \vec{r}_A - \vec{r}_B$ findet man (vgl. die *Ergänzung: Das Zweikörperproblem* im Anschluss an diesen Abschnitt)

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\ddot{\vec{r}} = -G\frac{m^{\mathrm{s}}_A m^{\mathrm{s}}_B}{r^2}\vec{e}_r\,, \tag{22}$$

und im Vergleich mit (17) die Keplerkonstante des Systems AB

$$\mathcal{K} = \frac{m^{\mathrm{s}}_B}{m_B}\mathcal{M}_A + \frac{m^{\mathrm{s}}_A}{m_A}\mathcal{M}_B \tag{23}$$

Gemäß Äquivalenzprinzip (20) sind schwere und träge Masse gleich, daher $\mathcal{K} = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B$ – lies: die Keplerkonstante eines Zwei-Körpersystems ist die Summe der gravitativen Quellstärken.

4 Ergänzung: Das Zweikörperproblem

Hat man zwei Körper A und B die in Wechselwirkung stehen, werden die nach Newton beschleunigt,

$$m_A\ddot{\vec{r}}_A = \vec{F}_{AB}\,, \qquad m_B\ddot{\vec{r}}_B = \vec{F}_{BA}\,, \tag{24}$$

worin m_A, m_B die trägen Massen der beiden Körper, $\vec{F}_{AB}$ die von Körper B auf Körper A ausgeübe Kraft, und $\vec{F}_{BA}$ die von Körper A auf Körper B ausgeübte Kraft. Im abgeschlossenen System, wenn also außer der Wechselwirkung keine anderen Kräfte wirken

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}\,, \tag{25}$$

was gerne “Actio gleich Reactio” zusammengefasst wird.

Führt man an dieser Stelle den *Massenmittelpunkt*, auch Schwerpunkt genannt,[†] ein

$$\vec{R} := \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B} \tag{26}$$

impliziert Newtons Actio-gleich-Reactio, Gl. (25), für das System (24) den sog *Schwerpunktsatz*,

$$\ddot{\vec{R}} = 0\,. \tag{27}$$

Die allgemeine Lösung ist schnell gefunden,

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V} t\,. \tag{28}$$

worin Konstanten $\vec{R}_0$ die Anfangslage des Massemittelpunkts, und $\vec{V}$ seine Geschwindigkeit. Lies: der Massenmittelpunkt bewegt sich wie ein freies Teilchen – nämlich geradlinig gleichförmig. Geometrisch befindet sich der Massemittelpunkt auf der Verbindungsgeraden der beiden Körper. Für $m_A = m_B$ genau in der Mitte, andernfalls in Richtung des massiveren Körpers verschoben.

Für den Radiusvektor

$$\vec{r} := \vec{r}_A - \vec{r}_B \tag{29}$$

findet man die Bewegungsgleichung

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{30}$$

worin abkürzend $\vec{F} := \vec{F}_{AB}$ (und also $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}$), und μ die sog. *reduzierte Masse*,

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \tag{31}$$

Das ist ganz nett: das gekoppelte Zwei-Körperproblem (24) konnte dank Newtons "Actio-gleich-Reactio" (25) in zwei entkoppelte Probleme zerlegt werden, wobei eines besonders einfach zu lösen ist. Zu beachten ist hier, dass weder $\vec{R}$ noch $\vec{r}$ die Koordinaten eines Teilchen. Da nun aber die Bewegungsgleichungen denen eines Teilchens so ähneln, redet man hier gerne von zwei *Quasiteilchen*. Das Quasiteilchenkonzept hat sich in vielen Zweigen der Physik bewährt, man denke nur an die Polaronen und Polaritonen in der Festkörperphysik . . .

Anmerkungen

[1]Wie wir heute wissen können die Kepler-Gesetze nur für das Zwei-Körpersystem uneingeschränkte Gültigkeit beanspruchen, und das auch nur wenn die Retardierungseffekte der ART vernachlässigt werden. Das mindert aber nicht ihren herausragenden Stellenwert für die Astronomie und Astrophysik.

[2]*De Stella nova in pede serpentarii, et qui sub ejus exortum de novo iniit, Trigono igneo*, Prag 1609. Wird häufig in der Kurzform zitiert *De Stella Nova*.

[3]*ibid.*

[4]*Harmonices Mundi libri V* 1619. Buch V der deutschen Übersetzung von Max Caspar (1939) ist abgedruckt in: *Die Klassiker der Physik*, Hrsg. Stephen Hawking, Hoffmann und Campe (2004), [ISBN

[†]was eigentlich irreführend ist – schließlich ist hier nirgendwo von Schwere die Rede.

3-455-09404-X]. Das dritte Keplersche Gesetz findet sich in Buch V, Kapitel III, Paragraph 8: "Allein, es ist ganz sicher und stimmt vollkommen, dass die Proportion, die zwischen den Umlaufzeiten irgend zweier Planeten besteht, genau das Anderthalbfache der Proportion der mittleren Abstände, d.h. der Bahnen selber ist, [...]".

[5] *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze* Leiden 1636. Die deutsche Übersetzung *Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend* von A. von Oettingen ist abgedruckt in: Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Band 11, Verlag Harri Deutsch 2004 [ISBN 3-8171-3414-2].

[6] *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Erstausgabe London 1687; weitere Auflagen 1713 und 1726 . Die hier verwendete Übersetzung *Mathematische Prinzipien der Naturlehre* ist die von Jakob Philipp Wolfers, erschienen 1872 bei Oppenheim Berlin, jüngst wieder abgedruckt in *Die Klassiker der Physik*.

[7] Der Flächensatz ist ein Korellar des Drehimpulserhaltungssatzes: im zentralsymmetrischen Kraftfeld, nicht notwendig isotrop, ändert sich der Drehimpuls im Laufe der Zeit nicht. Linear algebraisch $\lambda = (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) \cdot \vec{n}$ worin $\vec{n}$ Flächennormale der Ekliptik. Mechanisch gleicht die Konstante λ dem auf die Masse bezogenen Drehimpuls, $\lambda = \ell/m$, wobei m die Masse des Körpers und ℓ sein Drehimpuls. Es wäre daher nicht falsch $\lambda = \ell/m$ zu benutzen, aber irrefürend: Kepler hat mit Massen nichts am Hut.

[8] Die Benennung der Keplerkonstanten ist nicht eindeutig; Wikipedia nennt $C := 4\pi^2/\mathcal{K}$ die Keplerkonstante, das Schulbuch "Physik Oberstufe" (Cornelsen) den Kehrwert.

[9] Im Anschluss an die heute gebräuchliche Notation $\mathcal{K} = GM$, worin G die sog. *Gravitationskonstante*, und $M = m_A + m_B$ die (träge) Gesamtmasse der Zentralgestirns B und des Planeten A. Im Falle $m_B \gg m_A$ ist $\mathcal{K}$ nicht nur unabhängig von der konkreten Planetenbahn, sondern darüberhinaus auch näherungsweise unabhängig von der Masse des Planeten. In diesem Grenzfall, der beispielsweise in unserem Sonnensystem realisiert ist, kann Kepler-III schärfer formuliert werden: in unserem Sonnensystem ist das Verhältnis T^2/a^3 für alle Planeten näherungsweise gleich.

[10] Newton identifiziert gleich zu Beginn seiner Principia träge und schwere Masse. In der Erläuterung zur 'Ersten Definition' ("Die Größe der Materie wird durch ihre Dichtigkeit und ihr Volumen vereint gemessen") schreibt er: "Diese Größe der Materie werde ich im Folgenden unter dem Namen *Körper* oder *Masse* verstehen und sie wird durch das Gewicht des jedesmaligen Körper bekannt. Dass die Masse dem Gewichte proportional sei, habe ich durch sehr genau angestellte Pendelversuche gefunden, wie später gezeigt werden wird". Vor dem Hintergrund der 'Zweiten Definition' ("Die Größe der Bewegung wird durch die Geschwindigkeit und die Größe der Materie vereint gemessen") wird klar, dass die träge Masse für die Mechanik von vorrangiger Bedeutung, und die Gleichheit von schwerer Masse und träger Masse ein empirischer Befund der sich auf eine spezielle Situation 'Schwerkraft' bezieht (vgl. auch die Diskussion am Ende dieses Abschnitts).

[11] Gravitative Quellstärke und Keplerkonstante sollen bitte nicht verwechselt bzw. identifiziert werden: die gravitative Quellstärke $\mathcal{M}$ ist Eigenschaft eines Körpers, die Keplerkonstante $\mathcal{K}$ das Charakteristikum eines Systems zweier Körper.

[12] Schon Newton hat die schwere Masse m^{s} und träge Masse m identifiziert. Als Begründung führte er Galileis Untersuchungen zum freien Fall und eigene Pendelversuche an. Man muss aber darauf hinweisen, dass die Setzung $m = m^{\mathrm{s}}$ logisch unabhängig ist von Newtons anderen Überlegungen, und ihre Gültigkeit nach wie vor Gegenstand emprischer Untersuchungen darstellt. Sollte sich eines Tages herausstellen, dass träge Masse und schwere Masse nicht gleich sind (bzw. nicht universell proportional sind), fiele damit das Äquivalenzprinzip und damit eine der zentralen Säulen der ART. Die Keplerschen Gesetze müssten damit aber nicht modifiziert werden. Abgesehen von der Symmterie $\mathcal{K}(A, B) = \mathcal{K}(B, A)$, die ja von (23) respektiert wird, enthalten sie schließlich keinerlei Aussage über die funktionale Abhängigkeit der Keplerkonstanten von den Eigenschaften der beteiligten Körper.